

# MODELOS CONSTITUTIVOS

## EN ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Juan Antonio Hernández Andrade,<sup>1</sup> José Ángel Ortiz Lozano<sup>2</sup>

### RESUMEN

La construcción de ciudades sustentables debe de realizarse en sitios habitables y seguros que permitan al ser humano desarrollarse. La base esencial de cualquier construcción es el análisis estructural, el cual diseña los elementos de la obra que soportan los diversos esfuerzos y momentos externos e internos que recaen en ella, por ejemplo, cargas vivas y muertas, empuje de suelos, efectos de viento y sismo, entre otros. El análisis estructural, a su vez, está integrado de diversos modelos constitutivos teóricos, empíricos o una combinación de ellos. Los modelos constitutivos son formulaciones matemáticas que describen el funcionamiento ideal de un elemento o volumen. Estos estudios varían de acuerdo a su complejidad, la cual dependerá del análisis establecido, por ejemplo, las propiedades físicas del material, esfuerzos existentes, comportamiento isotrópico o anisotrópico, condiciones de ambiente, entre otros. Los modelos constitutivos han evolucionado a la par de los nuevos análisis y planteamientos físico-matemáticos, así como del desarrollo de la tecnología, permitiendo considerar una mayor cantidad de variables en el estudio estructural, lo que era imposible hace cien años, como es el caso de animaciones de las estructuras, posibilitando la anticipación de los puntos de falla.

*Palabras clave:* modelo constitutivo, análisis estructural, construcción, esfuerzos, *software*.

---

1 Universidad Autónoma de Aguascalientes.

2 Universidad Autónoma de Aguascalientes.

## INTRODUCCIÓN

Lezama y Domínguez (2006) indican que la construcción de ciudades sustentables se orienta a la conformación de sitios habitables, seguros, justos, de socialización, que preserven sus características culturales y ambientales, y permitan el desarrollo del ser humano, sin comprometer al medio ambiente de las generaciones futuras. La falta de planificación debido a la rápida urbanización provoca problemas sociales y económicos, por ello, se requiere una adecuación en la construcción de viviendas, edificaciones, áreas y servicios públicos.

Existen diversos enfoques de cómo pueden mejorar los procesos de construcción, permitiendo, así, optimizar la sostenibilidad urbana –debido a un control medido de construcción– y, además, ser amigables con el medio que nos rodea. Un enfoque poco visto es a través del análisis mecánico, tanto de los materiales como de todo el volumen edificado, dado que, al mejorar las bases de cálculo, se permite una mejor selección y cantidad de materiales, así como su complementación en la normativa requerida.

La resistencia de materiales tiene como objetivo determinar la respuesta de las estructuras (estados de tensión y deformación) cuando se ven sometidas a las diferentes acciones que deben de soportar durante su construcción y su vida útil, considerando el dimensionamiento de cada uno de los elementos estructurales (Cervera y Blanco, 2002). Algunas de las acciones que actúan sobre las estructuras son permanentes (el peso propio, cargas muertas, acciones reológicas, entre otros) y otras son variables (viento, nieve, sismos, incendios, inundaciones, entre otros), lo que lleva a satisfacer los criterios de resistencia que están establecidos en la normatividad (Cervera y Blanco, 2014).

Se han desarrollado modelos para mantener el equilibrio de fuerzas y momentos externos e internos, así como el comportamiento de los materiales o elementos estructurales ante los diferentes tipos de esfuerzo (compresión, tensión, flexión, cortante o torsión). En la mecánica de materiales son conocidos como “modelos constitutivos” aquellas fórmulas que mantienen en balance las ecuaciones de cinemática, es decir, la relación esfuerzo-deformación (Runesson, 2006).

## MODELOS CONSTITUTIVOS EN EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Existe una amplia variedad de materiales que se analizan en problemas de esfuerzo-deformación, y por cada uno de ellos, se cuenta con un modelo constitutivo que describe su comportamiento. Una forma de clasificar dichos materiales es de acuerdo a su respuesta ante los esfuerzos, por ejemplo: la goma (o caucho) es un material que tiene una respuesta puramente elástica; el acero exhibe una ductilidad más allá de su rendimiento; la arena fluye al reordenar sus partículas y su interacción mecánica principal es la

fricción; o simplemente el concreto, que no cuenta con ductilidad y se vuelve quebradizo.

Cada uno de los materiales cuenta con propiedades físicas, químicas y mecánicas únicas, por ejemplo, el acomodo de la microestructura de acero al carbón (figura 1) permite un alto grado de ductilidad, esto es porque su estructura se reajusta; por otra parte, la microestructura del concreto simple (figura 2), al existir un diferencial de las propiedades mecánicas de sus elementos (cemento, grava, arena, etc.), se convierte en un material frágil o quebradizo ante ciertos esfuerzos.

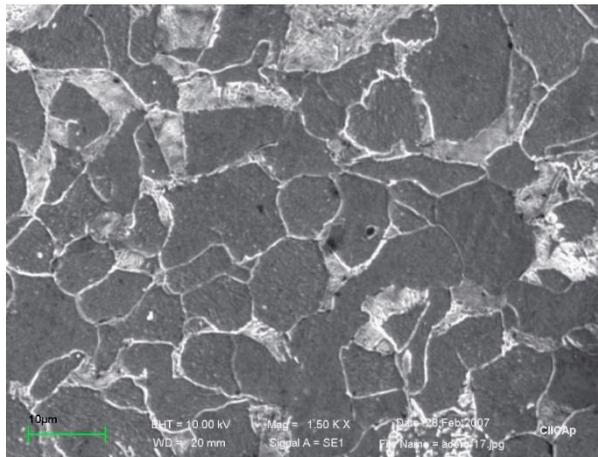


Figura 1. Microestructura de acero al carbón. Fuente: Cuevas-Arteaga *et al.* (2012).

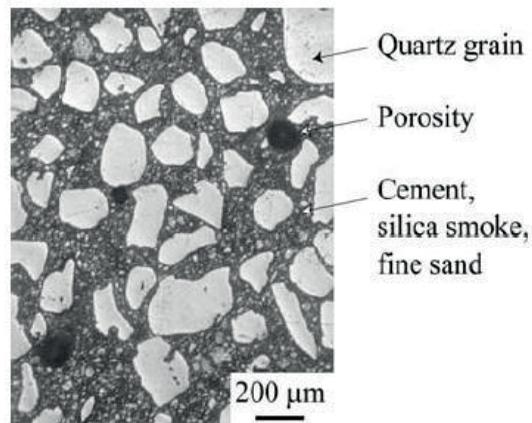


Figura 2. Microestructura del concreto. Fuente: Hild *et al.* (2003).

Para plantear y desarrollar una teoría que describa el comportamiento de un elemento estructural, es necesario definir el tipo de material, tipo de

tensión al que será sometido, propiedades mecánicas (capacidad de elasticidad/plasticidad, resistencia a los esfuerzos, dureza, módulo de Young, entre más variables), así como los efectos externos como la temperatura y corrosión. Haciendo un planteamiento matemático se obtiene:

$$f_i = (\alpha, \beta, \gamma, \dots) \quad \text{Ec. 1}$$

Donde  $f_i$  es la función que describe el comportamiento de  $i$  material y dependerá de diversas variables ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ), que pueden ser: propiedades mecánicas del material, esfuerzos aplicados, temperatura, condiciones de frontera, entre otros; convirtiéndolo en un sistema de ecuaciones complejo debido a la integración e interacción de estas variables.

Para resolver los sistemas de ecuaciones, generalmente se emplean *softwares*, los cuales permiten resolver matrices complejas empleando diferentes tipos de análisis (por ejemplo, análisis lineal, no lineal, generación de mallas, análisis superficial o volumétrico, mixto, entre otros), simplificando, así, los tiempos de ejecución y mejorando la interpretación de los resultados por medios de gráficos y animaciones.

Tomando como ejemplo al concreto reforzado (con barras o fibras) para estudiar la teoría y usos de los modelos constitutivos (dado que es un material que se emplea en la mayoría de los elementos estructurales, tales como columnas, trabes, marcos, losas, muros y cimentación), tenemos que la interacción de concreto-acero o concreto-fibra le permite —al concreto— tener un mejor rendimiento en su estado elástico. Sin embargo, esta interacción se vuelve compleja debido al diferencial mecánico de los materiales. A causa de su amplio uso, se cuentan con manuales y/o reglamentos que regulan el diseño de resistencia (a falla) que debe de cumplir el concreto; en México se cuenta con las normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto (Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica [SMIG], 2017). Por otro lado, se encuentran los *softwares* comerciales, como el programa Abaqus (Dassault Systèmes, 2021).

## ANÁLISIS NO LINEAL

La principal diferencia entre un análisis lineal y no lineal es que en el segundo se considera la deformación de la estructura debido a los cambios de esfuerzos sobre ella. El análisis lineal es conveniente para una aproximación de aquello que podría diseñarse, mientras que el análisis no lineal es un método para la aproximación numérica a la solución, empleando un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Este último es muy popular por su proximidad numérica referente a las condiciones de frontera, es decir, aquí es donde una o más variables dependientes satisfacen las ecuaciones diferenciales (Hutton, 2004).

Un ejemplo del análisis no lineal está dado por Rusiński *et al.* (2004), quienes analizaron el esfuerzo axial sobre veinte vigas de acero DOCOL 800DP de pared delgada (figura 3) unidas por puntos de soldadura me-

diante el modelo de elemento finito (Abaqus), tomando en cuenta la no linealidad de la geometría. Concluyeron que las deformaciones entre el modelo generado en el programa ABAQUS y lo observado en el laboratorio eran semejantes, acreditando el modelo no lineal.

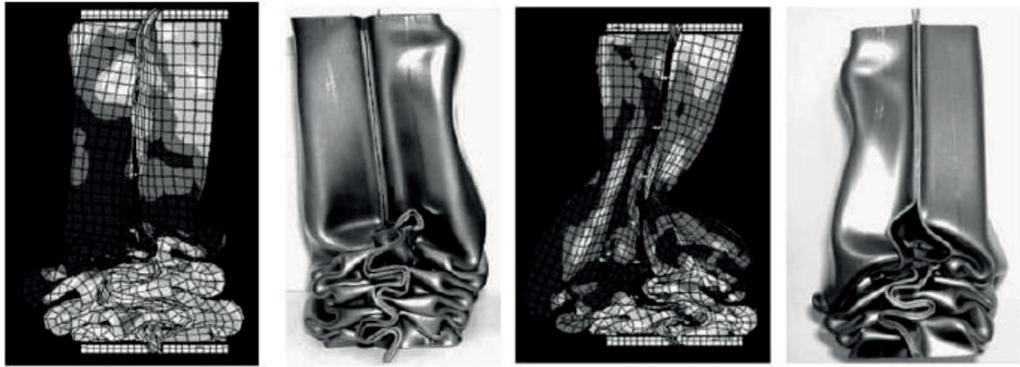


Figura 3. Comparación de deformación. Fuente: Rusiński *et al.* (2004).

Existen diversos métodos para realizar un análisis no lineal, los más comunes son:

## MÉTODO DE ELEMENTO FINITO

El método de elemento finito o *finite element method* (FEM) consiste en que un volumen, del cual se conocen sus propiedades físicas, está compuesto por infinitos elementos  $P(x,y)$ , donde una o varias ecuaciones se cumplen en cada uno de los elementos (Hutton, 2004). Un ejemplo de ello se presenta en la figura 4.

## MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El método de diferencias finitas o *finite difference method* (FDM) está basado en la definición de la derivada de una función  $f(x)$ :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{Ec. 2}$$

Donde  $x$  es una variable independiente. La solución de la ecuación diferencial proporciona una constante de integración, dicha constante es determinada bajo una condición (inicial o de frontera) que debe de satisfacer.

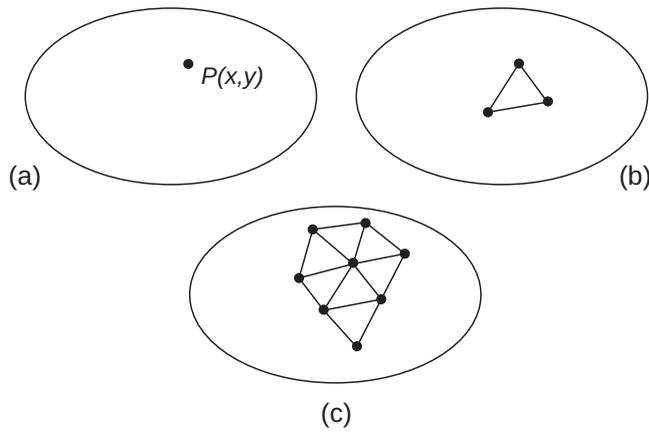


Figura 4. Representación gráfica del método de elemento finito. Fuente: representación gráfica del FEM basado en Hutton (2004)

## MÉTODO DEL ELEMENTO DISCRETO

El método de elemento discreto o *discrete element method* (DEM) es un método intuitivo en donde partículas discretas se encuentran con otras partículas durante una simulación dinámica (figura 5). Cada nodo tiene un grado de libertad de desplazamiento y de rotación, lo que les permite interactuar con otros nodos.

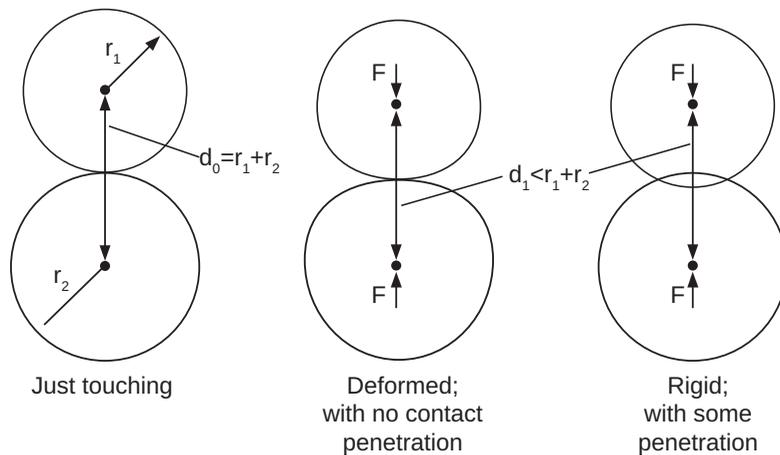


Figura 5. Representación gráfica del método del elemento discreto. Fuente: representación gráfica del DEM basado en 3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes® (2021)

## MÉTODO DEL ELEMENTO APLICADO

El método del elemento aplicado o *applied element method* (AEM) consiste en que un volumen está dividido en pequeños elementos rígidos, los cuales están conectados entre ellos por resortes en sentido normal y corte (Eraky *et al.*, 2021). Los grados de libertad dependerán del tipo de análisis, por ejemplo, tres grados de libertad en un análisis en dos dimensiones o seis grados de libertad en un análisis en tres dimensiones (figura 6).

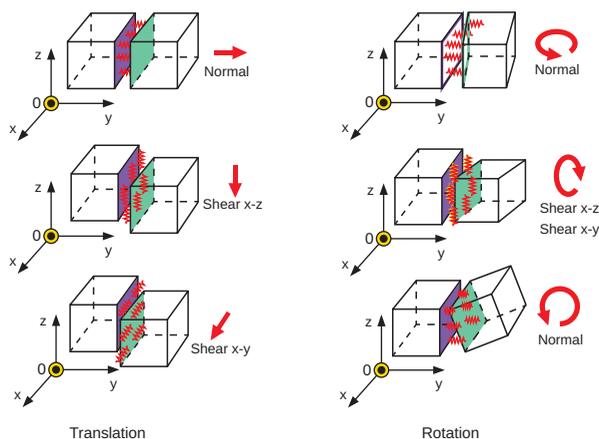


Figura 6. Representación gráfica del método del elemento aplicado. Fuente: representación gráfica del AEM basado en Eraky, Mustafa and Badawy (2021).

Los métodos anteriores son planteamientos numéricos del comportamiento de la materia y su interacción con su entorno y propiedades físicas y mecánicas, así como las condiciones fronteras del sistema. La solución se obtiene al establecer un sistema de ecuaciones que cumplan con las variables dependientes e independientes establecidas con anterioridad.

## MODELOS CONSTITUTIVOS EN LA BIBLIOGRAFÍA

Se han planteado numerosos modelos que intentan demostrar la relación del esfuerzo-deformación en diversos elementos estructurales, la mayoría de ellos se desarrollan de forma empírica. A continuación, se presentan algunos autores que plantean su propio modelo para elementos de concreto.

Un ejemplo es Gao *et al.* (1997), quienes obtuvieron mejoras en las propiedades del concreto ligero al emplear fibras de refuerzo de acero, proponiendo las siguientes ecuaciones que describen la relación esfuerzo-deformación:

Esfuerzo a la tracción

$$f_{st} = 0.94f_t(1 - V_f) + 3.02V_f l_f/d_f \quad \text{Ec. 3}$$

Esfuerzo a la flexión

$$f_{sw} = 0.92f_w(1 - V_f) + 4.19V_f l_f/d_f \quad \text{Ec. 4}$$

Módulo de elasticidad

$$E_c = E_m(1 + 0.173V_f l_f/d_f) \quad \text{Ec. 5}$$

Relación de Poisson

$$\nu_c = \nu_m(1 - 0.172V_f l_f/d_f) \quad \text{Ec. 6}$$

Las resultantes de los esfuerzos anteriores dependen del volumen de fibra aplicado ( $V_f$ ) y de su relación geométrica longitud/diámetro ( $l_f/d_f$ ).

En un segundo ejemplo se tiene a Liang *et al.* (2016), quienes plantearon la relación de esfuerzo-deformación de muestras de concreto reforzado con fibras de polipropileno, variando la aplicación de la ecuación de acuerdo a la posición que se está estudiando según su curva esfuerzo-deformación:

En la sección creciente de la curva ( $\varepsilon \leq \varepsilon_p$ )

$$\sigma = E_c \varepsilon_{t,r} x \quad \text{Ec. 7}$$

En la sección decreciente de la curva ( $\varepsilon > \varepsilon_p$ )

$$\sigma = \left[ \frac{\rho_t}{\alpha_t(x-1)^{1.7} + x} \right] E_c \varepsilon_{t,r} x \quad \text{Ec. 8}$$

Donde

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{t,r}}; \rho_t = \frac{f_{t,r}}{E_c \varepsilon_{t,r}; \varepsilon_{t,r} = f_{t,r}^{0.54} \times 65 \times 10^{-6}} \text{ y } \alpha_t = 0.312 f_{t,r}^2.$$

Donde  $\varepsilon_{t,r}$  es la deformación pico correspondiente al  $f_{t,r}$ .  $E_c$  es el módulo de deformación.

Así como estos dos casos, existen diversos investigadores que plantean su propio modelo constitutivo (Dhakal *et al.*, 2005; Yazıcı *et al.*, 2007; Timothy *et al.*, 2016; Wei *et al.* 2022; por mencionar algunos), donde no existe similitud entre sus modelos. Esto se debe al planteamiento matemático en el que se basa su modelo, el material que se utiliza, el tipo de esfuerzo que se está calculando, entre otras variables a considerar.

## MODELOS CONSTITUTIVOS EN ABAQUS®

Abaqus pertenece a Dassault Systemes Simulia Corp. El *software* es un compendio de programas de simulación y modelación estructural lineal y no lineal, empleando el análisis de elementos finitos. El modelado de materiales que abarca son metales, polímeros, compuestos, concreto, entre otros. Abaqus, asume que existe una relación entre la tasa de deformación elástica e inelástica:

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} \quad \text{Ec. 9}$$

Donde:

$\varepsilon$  = es la tasa de desplazamiento total

$\varepsilon^{el}$  = es la tasa de cambio de desplazamiento elástico

$\varepsilon^{pl}$  = es la tasa de cambio de desplazamiento plástico

En muchos modelos de plasticidad, la elasticidad se considera lineal. La función  $f$  define el límite de la región puramente elástica:

$$f_i(\sigma, \theta, H_{i,\alpha}) < 0 \quad \text{Ec. 10}$$

Para un sistema  $i$ , donde  $\theta$  es la temperatura,  $H_{i,\alpha}$  es un conjunto de parámetros de endurecimiento. El subíndice  $\alpha$  representa que existen diversos modelos de este tipo (endurecimiento), y se especificará cuando se defina el modelo plástico.

Los modelos constitutivos para el concreto están basados en la teoría de daño plástico escalar o por el modelo de agrietamiento. Cuando el concreto es sometido principalmente por compresión, la respuesta del concreto estará modelada por la teoría elastoplástica. La respuesta de compresión y agrietamiento del concreto ante el comportamiento uniaxial se describe en la figura 7.

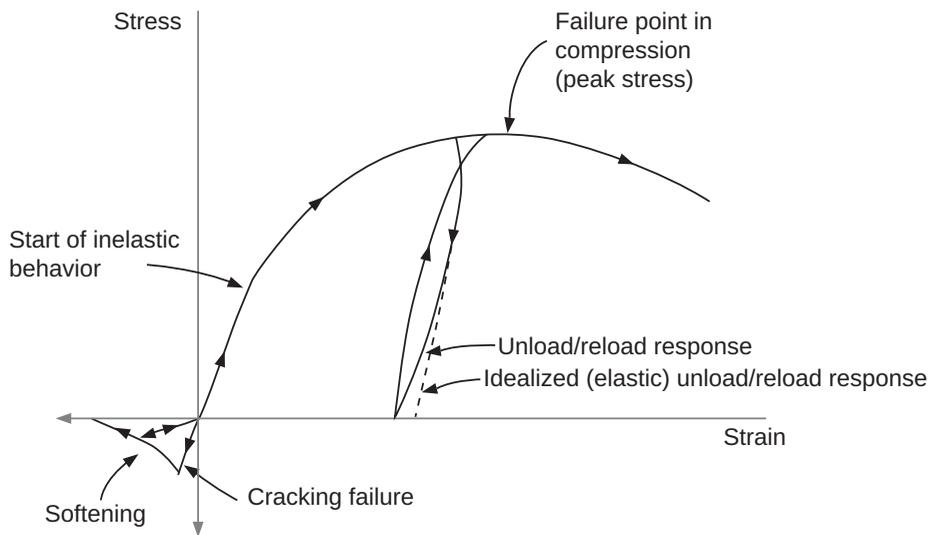


Figura 7. Comportamiento uniaxial del concreto simple.  
Fuente: Dassault Systèmes (2021).

El modelo elastoplástico utiliza los conceptos de la teoría de plasticidad para el concreto. Las bases del comportamiento postagrietamiento están dadas por el concepto de fracturas frágiles de Hillerborg *et al.* (1976), mientras que los modelos de daños plásticos están basados en los modelos de Lubliner *et al.* (1989) y Lee y Fenves (1998). El modelo de dirección de agrietamiento está basado en Rots & Blaauwendraad (1989), el comportamiento gráfico se observa en la figura 8.

## ¿QUÉ IMPACTO TIENEN LOS MODELOS CONSTITUTIVOS EN LA SOCIEDAD?

Los especialistas de diseño estructural y construcción se deben de basar en una normativa que indique los valores mínimos y máximos que deben de trabajar los elementos estructurales y las deformaciones permisibles, así como las condiciones de los materiales a emplear. Los modelos constitutivos sirven para establecer numéricamente estos valores a cumplir, debido a que se puede predecir el comportamiento de la deformación o la capacidad de carga de elementos estructurales.

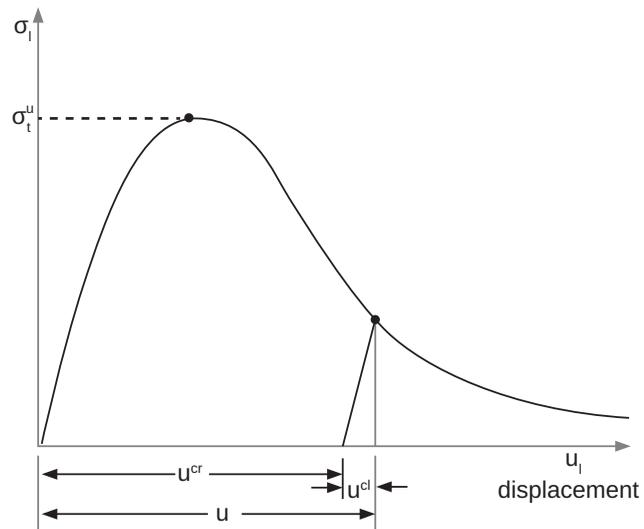


Figura 8. Comportamiento de agrietamiento basado en la energía de fractura. Fuente: Dassault Systèmes (2021).

Un ejemplo de lo anterior es el caso de México, donde se cuenta con las normas técnicas complementarias para el diseño y construcción de estructuras de concreto. Para el diseño y construcción adecuado de este tipo de estructuras, la normativa establece propiedades que debe de cumplir el concreto de clase I (tabla 1), así como los factores de resistencia (tabla 2) que deben emplearse para el cálculo al momento de diseñar las secciones con respecto a cada fuerza o momento interno que actué en ella.

Algunos de los diseños de estado límite se presentan a continuación:

*Resistencia a flexión (para secciones rectangulares con acero de compresión)*

$$M_R = F_R \left[ (A_s - A_s') f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A_s' f_y (d - d') \right] \quad \text{Ec. 11}$$

$$a = \frac{(A_s - A_s') f_y}{f_c'' b} \quad \text{Ec. 12}$$

Donde:

$M_R$  = resistencia de diseño a flexión, N-mm (kg-mm);

$a$  = profundidad del bloque equivalente de esfuerzos, mm (cm);

$A_s$  = área del refuerzo de tensión, mm<sup>2</sup> (cm<sup>2</sup>);

$A_s'$  = área del acero a compresión, mm<sup>2</sup> (cm<sup>2</sup>);

$f_y$  = esfuerzo especificado de fluencia del acero de refuerzo, MPa (kg/cm<sup>2</sup>);

$f_c''$  = esfuerzo uniforme de compresión, MPa (kg/cm<sup>2</sup>);

$d$  = peralte efectivo, mm (cm); y

$d'$  = distancia entre el centroide del acero a compresión y la fibra extrema a compresión, mm (cm).

Resistencia a flexocompresión (en dos dimensiones). Para  $\frac{P_R}{P_{R0}} \geq 1$

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{R0}}} \quad \text{Ec. 13}$$

Donde:

$P_R$  = carga normal resistente de diseño aplicada con las excentricidades  $e_x$  y  $e_y$ , N (kg);

$P_{R0}$  = carga axial resistente de diseño suponiendo  $e_x = e_y = 0$ , N (kg);

$P_{Rx}$  = carga normal resistente de diseño aplicada con una excentricidad ( $e_x$ ) en un plano de simetría, N (kg); y

$P_{Ry}$  = carga normal resistente de diseño aplicada con una excentricidad ( $e_y$ ) en un plano de simetría, N (kg);

Resistencia a fuerza cortante (elementos sin presfuerzo)

Siendo

$$p = \frac{A_s}{bd} \quad \text{Ec. 14}$$

Si  $p < 0.015$

$$V_{cR} = F_R(0.2 + 20p)0.3\sqrt{f'_c}bd \quad \text{Ec. 15}$$

Si  $p \geq 0.015$

$$V_{cR} = F_R\left(3.5 - 2.5\frac{M}{Vd}\right)0.16\sqrt{f'_c}bd \quad \text{Ec. 16}$$

Donde:

$V_{cR}$  = es la fuerza cortante de diseño, N (kg);

$b$  = ancho de la sección, mm (cm);

$M$  = momento flexionante que actúa en la sección, N-mm (kg-cm); y

$V$  = fuerza cortante que actúa en la sección, N (kg).

Tabla 1. Propiedades del concreto clase 1

Propiedad	Valor
Peso volumétrico	22 kN/m <sup>3</sup> (2.2 t/m <sup>3</sup> )
Resistencia a la compresión ( $f'_c$ )	25 MPa (250 kg/cm <sup>2</sup> )
Resistencia media a tensión ( $f'_t$ )	$0.47\sqrt{f'_c}$ en MPa ( $1.5\sqrt{f'_c}$ en kg/cm <sup>2</sup> )
Resistencia media a tensión o módulo de ruptura ( $f_f$ )	$0.63\sqrt{f'_c}$ en MPa ( $2\sqrt{f'_c}$ en kg/cm <sup>2</sup> )

Continuación Tabla 1

<b>Tabla 1. Propiedades del concreto clase 1</b>	
<b>Propiedad</b>	<b>Valor</b>
<b>Módulo de elasticidad (<math>E_c</math>) para concretos con agregado grueso calizo</b>	$4,400\sqrt{f'_c}$ en MPa ( $14,000\sqrt{f'_c}$ en kg/cm <sup>2</sup> )
<b>Módulo de elasticidad (<math>E_c</math>) para concretos con agregado grueso basáltico</b>	$3,500\sqrt{f'_c}$ en MPa ( $11,000\sqrt{f'_c}$ en kg/cm <sup>2</sup> )
<b>Contracción por secado final (<math>\epsilon_{cf}</math>)</b>	0.001
<b>Flujo plástico</b>	2.0
<b>Módulo de elasticidad (<math>E_s</math>) para el acero de refuerzo</b>	$2 \times 10^5$ MPa ( $2 \times 10^6$ kg/cm <sup>2</sup> )

**Tabla 2. Factores de resistencia**

	<b>Diseño</b>	<b>Valor <math>F_R</math></b>
	<b>Para flexión</b>	0.9
	<b>Para cortante y torsión</b>	0.75
	<b>Para transmisión de flexión y cortante en losas o zapatas</b>	0.65
	<b>Para flexocompresión cuando el elemento falla en tensión</b>	0.75
	<b>Para aplastamiento</b>	0.65

Para el concreto reforzado con fibras, la normativa indica que las propiedades de capacidad de deformación, resistencia al impacto, absorción de energía y resistencia a tensión incrementadas varían (de forma sustancial o hasta nula) dependiendo de la cantidad y tipo de fibras empleados. No obstante, no se cuenta con ningún tipo de formulación para su diseño.

## CONCLUSIONES

Existe una amplia cantidad de modelos constitutivos aplicados en el análisis estructural, ya sea en normatividad, investigación o desarrolladores de plataformas o *softwares*, los cuales permiten una adecuada ejecución en las obras, siendo amigable con el contorno y sin perder la funcionalidad del espacio. En el caso de México, las NTC para el diseño de concreto y sus modelos están guiados al estado límite del elemento estructural y se basan en la geometría del elemento y propiedades mecánicas del material. Por

otro lado, los *softwares* libres o de comercio cuentan con un compendio de modelos que contemplan, también, la geometría y propiedades mecánicas, además de otros elementos, como lo es la deformación con respecto a la posición y el tiempo. El empleo del modelo constitutivo dependerá del usuario, de acuerdo a los resultados deseados, las variables a emplear, la memoria de cómputo y el tiempo; así que se aconseja una revisión minuciosa en fuentes de datos y normatividad para la ejecución de dichos modelos de manera manual o con el empleo de programas de cálculo y modelación.

## REFERENCIAS

- Dassault Systèmes. (2021). *3D Design & Engineering Software - Dassault Systèmes®*. Recuperado de <<https://www.3ds.com/>>.
- Cervera, M. y Blanco, E. (2002). *Mecánica de Estructuras. Libro 1: Resistencia de Materiales*. Barcelona: UPC.
- Cervera, M. y Blanco, E. (2014). *Mecánica de Estructuras*. Barcelona: CIM-NE.
- Cuevas-Arteaga, C., Porcayo-Calderon, J., Campos, C. F. y Rodriguez, A. (2012). Comparison of Corrosion Resistance of Carbon Steel and Some Stainless Steels Exposed to LiBr-H<sub>2</sub>O Solution at low Temperatures. *International journal of electrochemical science*, 7(1), 445-470.
- Dhakal, R., Wang, C. y Mander, J.B. (2005). Behavior of steel fibre reinforced concrete in compression. *Engineering: Conference Contributions*. Recuperado de <<https://ir.canterbury.ac.nz/handle/10092/4408>>.
- Eraky, A., Mustafa, S. y Badawy, M. (2021). Structural Analysis Using Applied Element Method: A Review. *The Egyptian Journal for Engineering Sciences and Technology*, 34, 16-27. doi: 10.21608/eijest.2021.56786.1043.
- Gao, J., Sun, W. y Morino, K. (1997). Mechanical properties of steel fiber-reinforced, high-strength, lightweight concrete. *Cement and Concrete Composites*, 19, 307-313. doi: 10.1016/S0958-9465(97)00023-1.
- Hild, F., Forquin, P. y Silva, A. (2003). Single and multiple fragmentation of brittle geomaterials. *Revue Française de Génie Civil*, 7, 973-1002. doi: 10.3166/rfgc.7.973-1002.
- Hillerborg, A., Modeer, M. y Petersson, P. E. (1976). Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. *Cement and Concrete Research*, 6, 773-782.
- Hutton, D. V. (2004). *Fundamentals of Finite Element Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill.
- Lee, J. y Fenves, G. L. (1998). Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(8), 892-900.
- Lezama, J. L. y Domínguez, J. (2006). Medio ambiente y sustentabilidad urbana. *Papeles de población*, 12(49), 153-176.

- Liang, N., Dai, J. y Liu, X. (2016). Study on Tensile Damage Constitutive Model for Multiscale Polypropylene Fiber Concrete. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2016(7), 1-6. doi: 10.1155/2016/9168984.
- Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. y Oñate, E. (1989). A Plastic-Damage Model for Concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3), 229-326.
- Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica (SMIG) (2017). *Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Reglamento de Construcción de la Ciudad de México*. Recuperado de <<https://www.smig.org.mx/archivos/NTC2017/normas-tecnicas-complementarias-reglamento-construcciones-cdmx-2017.pdf>>.
- Rots, J.G. y Blaauwendraad, J. (1989). Crack Models for Concrete: Discrete or Smeared? Fixed, Multi-directional or Rotating? *HERON*, 34(1), 1-59.
- Runesson, K. (2006). *Constitutive Modeling of Engineering Materials - Theory and Computation*. Goteborg: Chalmers University of Technology.
- Rusiński, E., Kopczyński, A. y Czmochoowski, J. (2004). Tests of thin-walled beams joined by spot welding. *Journal of Materials Processing Technology*, 157, 405-409. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2004.09.063.
- Timothy, J., Zhan, Y. y Meschke, G. (2016). Multiscale modeling FRC Composites. En Saouma, V., Bolander, J., y Landis, E. (Eds.), *9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*. Recuperado de <<http://framcos.org/FraMCoS-9/Full-Papers/151.pdf>>.
- Wei, Y., Qin, Y., Junrui, C., Xu, C., Zhang, Y. y Zhang, X. (2022). Experimental Study on Compressive and Flexural Performances of Polypropylene Fiber-Reinforced Concrete. *Geofluids*, 2022(3), 1-24. doi: 10.1155/2022/4168918.
- Yazıcı, Ş., İnan, G. y Tabak, V. (2007). Effect of aspect ratio and volume fraction of steel fiber on the mechanical properties of SFRC'. *Construction and Building Materials - CONSTR BUILD MATER*, 21, 1250-1253. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2006.05.025.

